

# Una introducción a la Realizabilidad.

Mauricio Germán GUILLERMO GONZÁLEZ.

Julio 2021

## 1. Abstract

La Realizabilidad consiste en definir una semántica polivalente, asociando a cada fórmula matemática un valor de verdad. Esos valores de verdad pueden ser de los más diversos tipos, por ejemplo: enteros, elementos de un álgebra de Heyting, conjuntos de programas escritos en alguna variante de  $\lambda$ -cálculo o subconjuntos de un álgebra combinatoria. A diferencia de la teoría de la demostración, cuyo énfasis está en la sintaxis, la realizabilidad interpreta a las fórmulas de un punto de vista algorítmico.

En este curso desarrollamos un panorama de temas desde los orígenes de la Realizabilidad de Kleene hasta la Realizabilidad Clásica de Krivine y la Realizabilidad Concurrente de Beffara. Se pondrá énfasis en tópicos de teoría de modelos, de especificación de programas y de la presentación algebraica de la Realizabilidad. Para desarrollar los aspectos algebraicos se incursionará también en los modelos categóricos de la Realizabilidad basados en Topos.

## 2. Cronograma

- Día 1** Constructivismo, intuicionismo, aritmética de Heyting. Realizabilidad de Kleene.
- Día 2** Realizabilidad de Kreisel. Modelos categóricos de la realizabilidad: el topos efectivo de Hayland.
- Día 3** Realizabilidad de Krivine. El problema de la especificación. Modelos de la Teoría de Conjuntos en Realizabilidad Clásica.
- Día 4** El modelo categórico de Streicher para la Realizabilidad de Krivine. Programa de algebrización.
- Día 5** Programación concurrente. Realizabilidad Concurrente de Beffara.

### 3. Prerrequisitos

Haber hecho algún curso elemental de lógica y/o de  $\lambda$ -cálculo. Si bien el curso es autocontenido, el haber trabajado previamente con algún lenguaje formal y algún cálculo sobre ese lenguaje ayuda a la comprensión del tema.

### 4. Bibliografía

#### Referencias

- [1] Emmanuel Beffara. *Logique, Réalisabilité et Concurrency*. Thèse de Mathématiques, spécialité Informatique. Université Paris Diderot - Paris 7, 2005. Français. <tel-00011205>. (tesis de doctorado).
- [2] Walter Ferrer Santos, Jonas Frey, Mauricio Guillermo, Octavio Malherbe, Alexandre Miquel. *Ordered Combinatory Algebras and Realizability*. Mathematical Structures in Computer Science, Camb. Univ. Press, 1–31 (2015).
- [3] Walter Ferrer Santos, Mauricio Guillermo, Octavio Malherbe. *Realizability in ordered combinatory algebras with adjunction*. Mathematical Structures in Computer Science, Volume 29, Issue 3, March 2019, pp. 430 - 464.
- [4] Walter Ferrer Santos, Octavio Malherbe. *The category of implicative algebras and realizability*. Mathematical Structures in Computer Science, Volume 29, Issue 10, November 2019, pp. 1575 - 1606.
- [5] Mauricio Guillermo, Alexandre Miquel. *Specifying Peirce's law in classical realizability*. Mathematical Structures in Computer Science, Volume 26, Issue 7, October 2016, pp. 1269 - 1303.
- [6] Mauricio Guillermo, Étienne Miquey. *Classical realizability and arithmetical formulæ*. Mathematical Structures in Computer Science, Volume 27, Issue 6, September 2017, pp. 1068 - 1107.
- [7] *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*. Ed. by J.V.Heijenoort. Cambridge, Mass. Harvard University Press (2002).
- [8] Jean-Louis Krivine. *Realizability algebras II: new models of ZF + DC*. Logical Methods in Computer Science, February 27, 2012, Volume 8, Issue 1.
- [9] Jaap van Oosten. *Realizability: an Introduction to its Categorical Side*. vol 152 of Studies in Logic. North-Holland, 2008.
- [10] Wesley Phoa. *An introduction to fibrations, topos theory, the effective topos and modest sets*. LFCS, Dept. of Computer Science, University of Edinburgh (January 1, 1992).

- [11] Thomas Streicher. *Krivine's Classical Realizability From a Categorical Perspective*. *Mathematical Structures in Computer Science* 23 (6) 1234–1256 (2013).
- [12] Thomas Streicher. *Realizability* Lecture notes of a course given on winter term 2004/05 (Technische Universität Darmstadt). <http://www2.mathematik.tu-darmstadt.de/streicher/REAL/REAL.pdf>